ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 36, No. 2, 1980

SUR UN PROBLEME AUX VALEURS PROPRES NON LINEAIRE

PAR
PHAM THE LAI ET D. ROBERT

ABSTRACT

In this paper, we give some sufficient conditions for which the differential operator $P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \cdots + \lambda^{m-1}P_{m-1} + \lambda^m$, depending polynomially on the complex parameter λ, verifies the following statement: there exists $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, $u_0 = 0$, $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ a Schwartz space of rapidly decreasing functions, such that $P(\lambda_0)u_0 = 0$—.

Introduction

Soit $P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \cdots + \lambda^{m-1}P_{m-1} + \lambda^m$ un polynôme de la variable complexe dont les coefficients $P_0, \cdots, P_{m-1}$ sont des opérateurs différentiels à coefficients indéfiniment dérivables dans $\mathbf{R}^n$. Nous nous proposons de donner des conditions suffisantes pour qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ et $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, tels que $P(\lambda_0)u_0 = 0$. Dans ce cas, par analogie au cas classique ($m = 1$), nous dirons que λ_0 est une valeur propre et u_0 un vecteur propre de la famille d'opérateurs $P(\lambda)$.

La motivation principale de ce travail est de donner un début de réponse à une question posée par B. Helffer [7]. Dans [7], l'auteur donne des exemples non triviaux d'opérateurs différentiels $A(x, D)$ à coefficients analytiques, hypoelliptiques et tels que l'équation $A(x, D)u = 0$ admette une solution non-analytique. Pour cela, on associe à $A(x, D)$ un polynôme à coefficients opérateurs différentiels $P(\lambda)$ et on construit la solution de $A(x, D)u = 0$ à partir d'une valeur propre et d'un vecteur propre de $P(\lambda)$. Par exemple, à l'opérateur $A = D_x^2 + (x^2D_y - D_z)^2$ est associé le polynôme $P(\lambda) = D_x^2 + (x^2 - \lambda)^2$ et il résultera de notre travail que $P(\lambda)$ admet au moins un vecteur propre dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. La recherche de vecteurs propres pour des polynômes à coefficients opérateurs a déjà fait l'object de plusieurs travaux. Citons par exemple Keldysh [9], Krein and Langer [10], Friedman and Shinbrot [5].

Reçu le 9 décembre 1979

Cependant, ces travaux ne sont pas directement applicables au cas différentiel considéré ici. Notre étude s'apparente plutôt aux travaux de S. Agmon [1] sur la résolvante des problèmes aux limites elliptiques.

La méthode d'Agmon consiste à contrôler la résolvante $(P_0 + \lambda)^{-1}$, $|\lambda| \to +\infty$, dans des secteurs du plan complexe d'ouverture suffisante et à en déduire qu'il existe un système complet de vecteurs propres (généralisés) par le principe de Phragmen–Lindelöf. De plus Agmon donne une condition nécessaire et suffisante sur le symbole du problème pour avoir un contrôle optimal sur une demi-droite issue de l'origine, donnée dans $\mathbf{C}$. Nous nous proposons de faire une étude analogue pour l'application $\lambda \to P(\lambda)^{-1}$.

Dans [2] M. S. Baouendi et J. Sjöstrand ont fait ce type d'étude dans le cas où $P_0, \cdots, P_{m-1}$ sont des opérateurs définis sur la sphère S^n et où P_0 est elliptique d'ordre m, P_j est un opérateur différentiels d'ordre $m - j$ pour $1 \leqq j \leqq m - 1$.

Nous remercions B. Helffer pour les discussions que nous avons eues avec lui à propos de ce travail et de ses applications.

Notre travail est organisé de la façon suivante:

(1) Le cadre fonctionnel: nous y établissons des résultats généraux utiles pour la suite. Ici l'outil principal est fourni par les puissances complexes de l'opérateur P_0.

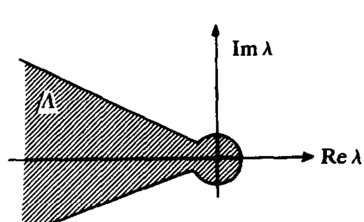
(2) Le cadre différentiel: c'est l'essentiel de notre travail. Nous y établissons la condition nécessaire et suffisante pour qu'une demi-droite soit un rayon de croissance minimale.

(3) Applications.

1. Le cadre fonctionnel

Soit H un espace de Hilbert complexe et $P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \cdots + \lambda^{m-1} P_{m-1} + \lambda^m$ une famille d'opérateurs non bornés de H où $\lambda \in \mathbf{C}$. On suppose que P_0 est un opérateur fermé à domaine dense $D(P_0)$ et que $P_1, \cdots, P_{m-1}$ sont définis sur $D(P_0)$. On fait en outre les hypothèses suivantes:

(H_1) $(P_0 - \lambda)^{-1}$ existe sur un voisinage ouvert du secteur fermé Λ du plan complexe symétrique par rapport à l'axe réel et du type:



De plus, on a $\|(P_0-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)}=O(1/|\lambda|)$ pour $\lambda\in\Lambda$, $|\lambda|\to+\infty$, où $\mathscr{L}(H)$ désigne l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de H muni de la norme usuelle.

Il résulte de (H_1) que l'on peut définir un groupe d'opérateurs fermés à domaine dense $s\to P_0^s$ paramétré par C, bornés si $\operatorname{Re} s<0$ (voir par exemple D. Robert [12]). On fait alors l'hypothèse:

(H_2) Pour tout entier j, $0\leqq j\leqq m-1$, les opérateurs $P_jP_0^{(j-m)/m}$ et $P_0^{(j-m)/m}P_j$ se prolongent en des opérateurs continus de H dans H.

Avant de formuler la troisième hypothèse, rappelons la:

Définition 1.1. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert complexes et $T:H_1\to H_2$ un opérateur compact. On désigne par $(\mu_j(T))_{j\geqq1}$ la suite décroissante des valeurs propres de $(T^*T)^{\frac12}$ où chaque valeur propre est répétée suivant sa multiplicité. Soit p réel >0. On dit que $T\in C^p(H_1,H_2)$ si $\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(T)^p<+\infty$.

Proposition 1.1 (Gohberg–Krejn [6]). *Si $A\in\mathscr{L}(H_1',H_1)$, $B\in\mathscr{L}(H_2,H_2')$ et $T\in C^p(H_1,H_2)$, alors $B.T.A\in C^p(H_1',H_2')$.*

(H_3) Il existe un réel $p>0$ tel que $P_0^{-1/m}\in C^p(H)$.

Proposition 1.2. *Sous les hypothèses précédentes, $P(\lambda)$ définit un opérateur fermé de domaine $D(P_0)$. Si $P(\lambda)^{-1}$ existe, alors il est compact. Enfin, pour tout $\lambda\in\mathbf{C}$, $P(\lambda)$ est un opérateur à indice et* $\operatorname{Ind}P(\lambda)=0$.

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\geqq1}$ une suite de $D(P_0)$ et $u,f\in H$ tels que $\lim_{n\to+\infty}P(\lambda)u_n=f$, $\lim_{n\to+\infty}u_n=u$ dans H.

On a $P(\lambda)u_n=(I+\lambda P_1P_0^{-1}+\cdots+\lambda^{m-1}P_{m-1}P_0^{-1}+\lambda^mP_0^{-1})P_0u_n$. Or $P_jP_0^{-1}$ est compact pour $1\leqq j\leqq m-1$. On en déduit qu'il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{n\geqq1}$ et $g\in H$ tels que: $\lim_{k\to+\infty}P_0u_{n_k}=g$ dans H. P_0 étant fermé, il en résulte que $u\in D(P_0)$ et que $P(\lambda)u=f$. D'où $P(\lambda)$ est fermé. $(P_0^{-1/m})^m=P_0^{-1}$ d'où P_0^{-1} est compact et $P(\lambda)^{-1}$ est compact.

On a $P(\lambda)P_0^{-1}=I+\text{compact}$ et $P_0^{-1}P(\lambda)=I+\text{compact}$. D'où $P(\lambda)$ est à indice et $\operatorname{Ind}P(\lambda)=-\operatorname{Ind}P_0^{-1}=0$.

P_0^s étant injectif pour tout s, on munit $D(P_0^s)$ de la norme $\|u\|_{D(P_0^s)}=\|P_0^su\|$.

Proposition 1.3. *Pour tout réel $s\in[0,1]$, $\lambda\to P(\lambda)^{-1}$ est une fonction méromorphe dans* C *à valeurs dans $\mathscr{L}(H,D(P_0^s))$.*

Démonstration. Suivant un procédé de Agmon–Nirenberg, on introduit la linéarisation en λ de $P(\lambda)$ en posant:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -P_0 & -P_1 & -P_2 & \cdots & -P_{m-1} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice $m \times m$ d'opérateurs. On regarde $\mathscr{A}$ comme un opérateur fermé non borné de l'espace de Hilbert

$$K = D(P_0^{(m-1)/m}) \times D(P_0^{(m-1)/m}) \times D(P_0^{(m-2)/m}) \times \cdots \times H$$

de domaine $D(\mathscr{A}) = D(P_0) \times D(P_0^{(m-1)/m}) \times \cdots \times D(P_0^{(1/m)})$.

Il est clair que $\mathscr{A}^{-1}$ existe et définit un opérateur compact de K dans K.

D'où $\mathscr{A} - \lambda$ est à indice, d'indice nul pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Or $\mathscr{A} - \lambda$ est injectif si et seulement si $P(\lambda)$ est injectif. Il en résulte que $\mathscr{A} - \lambda$ est inversible si et seulement si $P(\lambda)$ est inversible. Il est classique que $\lambda \to (\mathscr{A} - \lambda)^{-1}$ est méromorphe de C à valeurs dans $\mathscr{L}(K)$. Posons $(\mathscr{A} - \lambda)^{-1} = (r_{ij}(\lambda))_{0 \leq i,j \leq m}$. Soit λ tel que $P(\lambda)^{-1}$ existe. Un calcul élémentaire montre que $P(\lambda)^{-1} = -r_{0,m-1}(\lambda)$. D'où la proposition.

Proposition 1.4. $\mathscr{A}^{-1} \in C^p(K)$.

Démonstration. On a évidemment $\operatorname{Im} \mathscr{A}^{-1} = D(P_0) \times \cdots \times D(P_0^{1/m})$. Il est équivalent de montrer que l'injection $D(P_0) \times \cdots \times D(P_0^{1/m}) \hookrightarrow K$ est de classe C^p. Désignons par R l'opérateur de K dans K:

$$R(u_0, \cdots, u_{m-1}) = (P_0^{-1/m} u_0, \cdots, P_0^{-1/m} u_{m-1}).$$

$\mathscr{A}^{-1} \in C^p(K)$ si et seulement si $R \in C^p(K)$. Soit J l'opérateur défini par:

$$J(u_0, \cdots, u_{m-1}) = (P_0^{1-(1/m)} u_0, \cdots, P_0^{-1/m} u_{m-1}).$$

J réalise un isomorphisme de K sur H^m et de $D(\mathscr{A})$ sur $[D(P_0^{1/m})]^m$. On a donc $R = J^{-1}.\tilde{R}.J$ où $\tilde{R}: H^m \to H^m$ est défini par

$$(u_0, \cdots, u_{m-1}) \to (P_0^{-1/m} u_0, \cdots, P_0^{-1/m} u_{m-1}).$$

Soit $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ la base des vecteurs propres associée à $[(P_0^{-1/m})^*(P_0^{-1/m})]^{\frac{1}{2}}$. $(e_k)_{1 \leq k \leq m}$ désignant la base canonique de $\mathbf{R}^m$, il est clair que $(\varphi_j e_k)_{1 \leq k < m}$ est la base des vecteurs propres de $(\tilde{R}^* \tilde{R})^{\frac{1}{2}}$.

Il en résulte que $\Sigma_{j \geq 1} (\mu_j \setminus \tilde{R}))^p = m \, \Sigma_{j \geq 1} [\mu_j(P_0^{-1/m})]^p < +\infty$.

En vue d'appliquer le principe de Phragmén–Lindelöf, nous allons préciser le comportement de la fonction méromorphe $\lambda \mapsto P(\lambda)^{-1}$.

On rappelle la définition suivante:

DÉFINITION 1.2. On dit qu'une fonction entière $F: \mathbf{C} \to B$ à valeurs dans un espace de Banach B est de type $p > 0$ s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $\|F(\lambda)\|_B \leqq e^{\gamma|\lambda|^p}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

PROPOSITION 1.5. (i) *Il existe une fonction entière ϕ de type p à valeurs scalaires telle que $\lambda \to \phi(\lambda)P(\lambda)^{-1}$ soit une fonction entière de type p à valeurs dans $\mathscr{L}(H, D(P_0))$.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(r_k)_{k \geqq 1}$ croissante de réels positifs telle que $\lim_{k \to +\infty} r_k = +\infty$ et une constante $c_\varepsilon > 0$ telles que*

$$\max_{|\lambda| = r_k} \|P(\lambda)^{-1}\|_{(H, D(P_0))} \leqq C_\varepsilon e^{r_k^{p+\varepsilon}} \qquad \textit{pour tout } k \geqq 1.$$

DÉMONSTRATION. On reprend les notations de la démonstration de la proposition 1.3. On a vu que $P(\lambda)^{-1} = -r_{0,m-1}(\lambda)$ où $(\mathscr{A} - \lambda)^{-1} = (r_{ij}(\lambda))_{0 \leqq i,j \leqq m-1}$. Or $(\mathscr{A} - \lambda)^{-1} = \mathscr{A}^{-1}(I - \lambda\mathscr{A}^{-1})^{-1}$ et $\mathscr{A}^{-1} \in C^p(\mathscr{K})$. On peut donc appliquer la théorie des déterminants régularisés. Soit k entier, $k - 1 < p \leqq k$. On pose alors

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \det_k (I - \lambda\mathscr{A}^{-1}) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda\mu_j) \exp\left(-\lambda\mu_j + \frac{(\lambda\mu_j)^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} (\lambda\mu_j)^{k-1} \right) \end{aligned}$$

où $(\mu_j)_{j \geqq 1}$ est la suite des valeurs propres de $\mathscr{A}^{-1}$ rangées par ordre de modules croissants où chaque valeur propre est répétée suivant sa multiplicité algébrique. Il résulte de Dunford–Schwartz ([4] p. 1106–1113) que ϕ est une fonction entière de type p et que $\lambda \to \phi(\phi(\lambda)(I - \lambda\mathscr{A}^{-1})^{-1}$ est entière de type p à valeurs dans $\mathscr{L}(K)$; d'où le point (i) de 1.5. D'après un résultat classique sur les fonctions entières de type p (Titchmarch [13]), on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(r_k)_{k \geqq 1}$ comme dans (ii) telle que: $\min_{|\lambda| = r_k} |\phi(\lambda)| \geqq e^{-r_k^{p+\varepsilon}}$. On en déduit alors (ii).

Avant de formuler le résultat suivant, posons la:

DÉFINITION 1.3 (Keldysh [9]). Soit $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tel que $P(\lambda_0)$ soit non injectif. On appelle sous-espace propre généralisé de P associé λ_0 le sous-espace vectoriel de $D(P_0)$, noté $\mathrm{sp}_{\lambda_0}[P]$, engendré par les solutions des systèmes:

$$(\mathrm{S}_k)\qquad \begin{cases} P(\lambda_0)u_0 = 0 \\ P(\lambda_0)u_1 + \dfrac{dP}{d\lambda}(\lambda_0)u_0 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(\lambda_0)u_k + \dfrac{dP}{d\lambda}(\lambda_0)u_{k-1} + \cdots + \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^kP}{d\lambda^k}(\lambda_0)u_0 = 0 \end{cases}$$

où k décrit $\mathbf{N}$.

Proposition 1.6. *Si $\bigcup_{\lambda\in\mathbf{C}} \mathrm{sp}_\lambda[\mathcal{A}]$ est total dans K, alors $\bigcup_{\lambda\in\mathbf{C}} \mathrm{sp}_\lambda[P]$ est total dans H.*

Démonstration. On sait que $\lambda \to (P-\lambda)^{-1}$ est méromorphe. Soit λ_0 un pôle de cette fonction. Ecrivons son développement de Laurent au voisinage de λ_0:

$$(P-\lambda)^{-1} = \frac{Q_r}{(\lambda-\lambda_0)^r} + \cdots + \frac{Q_1}{\lambda-\lambda_0} + S(\lambda)$$

où S est holomorphe au voisinage de λ_0. Pour $1 \leqq j \leqq r$, Q_j est donné par la formule de Cauchy:

$$Q_j = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)^{j-1}(P-\lambda)^{-1}d\lambda$$

où $\varepsilon > 0$ est assez petit. D'où il résulte que $\mathrm{Im}\, Q_1 + \cdots + \mathrm{Im}\, Q_r \subsetneq D(P_0)$.

Lemme 1. $\mathrm{sp}_{\lambda_0}[P] = \mathrm{Im}\, Q_r + \cdots + \mathrm{Im}\, Q_1$.

Démonstration du Lemme 1. Au voisinage de λ_0, $\lambda \neq \lambda_0$, on a $P(\lambda)P(\lambda)^{-1} =$ Identité. D'autre part

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda-\lambda_0)^j}{j!}\frac{d^jP}{d\lambda^j}(\lambda_0).$$

Par identification on obtient

$$\begin{aligned} &P(\lambda_0)Q_r = 0 \\ &P(\lambda_0)Q_{r-1} + \frac{dP}{d\lambda}(\lambda_0)Q_r = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &P(\lambda_0)Q_1 + \frac{1}{2}\frac{dP}{d\lambda}(\lambda_0)Q_2 + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}P}{d\lambda^{r-1}}(\lambda_0)Q_r = 0. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $W \in H$, $(Q_rW, \cdots, Q_1W)$ est solution de (S_{r-1}) par conséquent on a $\mathrm{Im}\, Q_r + \cdots + \mathrm{Im}\, Q_1 \subsetneq \mathrm{sp}_{\lambda_0}[P]$. Inversement soit $(u_0, u_1, \cdots, u_k)$ une solution de (S_k). Montrons par récurrence sur j que $u_j \in \operatorname{Im} Q_1 + \cdots + \operatorname{Im} Q_r$. u_0 vérifie $P(\lambda_0)u_0 = 0$. Posons $Z(\lambda) = P(\lambda)u_0/(\lambda - \lambda_0)$. On a $Z(\lambda) = \Sigma_{j=0}^{m-1} (\lambda - \lambda_0)^j a_j$ où $a_j \in H$. Or $u_0 = (\lambda - \lambda_0)P(\lambda)^{-1}Z(\lambda)$. On remplace alors $P(\lambda)^{-1}$ par son développement de Laurent et on identifie; ce qui donne $u_0 = \Sigma_{j=1}^{r} Q_j(a_{j-1})$. Supposons alors que $u_0, u_1, \cdots, u_j \in \operatorname{Im} Q_1 + \cdots + \operatorname{Im} Q_r$ pour $j < k$ et montrons que $u_{j+1} \in \operatorname{Im} Q_1 + \cdots + \operatorname{Im} Q_r$. Pour cela posons:

$$Z_{j+1}(\lambda) = \frac{P(\lambda)u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{j+1}} + \frac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^j} u_1 + \cdots + P(\lambda)u_{j+1}.$$

On constate facilement que Z_{j+1} est holomorphe au voisinage de λ_0 et que $Z_{j+1}(\lambda_0) = 0$. On a alors:

$$\frac{u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{j+1}} + \frac{u_1}{(\lambda - \lambda_0)^j} + \cdots + u_{j+1} = P(\lambda)^{-1}Z_{j+1}(\lambda)$$

et par identification on obtient que $u_{j+1} \in \operatorname{Im} Q_1 + \cdots + \operatorname{Im} Q_r$.

DEMONSTRATION DE 1.6. Ecrivons le développement de Laurent de $(\mathscr{A} - \lambda)^{-1}$ au voisinage de λ_0:

$$(\mathscr{A} - \lambda)^{-1} = \frac{B_r}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \cdots + \frac{B_1}{\lambda - \lambda_0} + T(\lambda).$$

On a évidemment $\operatorname{sp}_{\lambda_0}[\mathscr{A}] = \operatorname{Im} B_r + \cdots + \operatorname{Im} B_1$.

Calculons les B_j en fonction des Q_j. On a $(\mathscr{A} - \lambda)^{-1} = (r_{ij}(\lambda))_{0 \leq i,j \leq m-1}$. Compte tenu de la définition de $\mathscr{A}$, on a la première de $(\mathscr{A} - \lambda)^{-1}$:

$$r_{0,0}(\lambda) = -P(\lambda)^{-1}\left(\sum_{j=0}^{m-2} \lambda^j P_{j+1} + \lambda^{m-1}\right)$$

$$r_{0,1}(\lambda) = -P(\lambda)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m-2} \lambda^{j-1} P_{j+1} + \lambda^{m-2}\right)$$

$$\cdots$$

$$r_{0,m-1}(\lambda) = -P(\lambda)^{-1}.$$

La ligne numéro l, $0 \leqq l \leqq m-1$, est donnée par:

$$r_{l,0}(\lambda) = \lambda^l + \lambda^{l+1} r_{0,0}(\lambda)$$

$$r_{l,1}(\lambda) = \lambda^{l-1} + \lambda^{l+1} r_{0,1}(\lambda)$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_{l,l}(\lambda) = \lambda^{l+1} r_{0,l}(\lambda)$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_{l,m-1}(\lambda) = \lambda^{l+1} r_{0,m-1}(\lambda).$$

Rappelons que $(\mathscr{A}-\lambda)^{-1}$ opère de K dans K où

$$K = D(P_0^{1-(1/m)})\times\cdots\times D(P_0^{1/m})\times H.$$

On déduit de ce qui précède que pour $1\leqq k\leqq r$ il existe une matrice d'opérateurs $(C_{i,j}^{(k)})_{o\leqq i,j\leqq m-1}$ sur K de sorte que $B_k = Q_k(C_{i,j}^{(k)})_{0\leqq i,j\leqq m-1}$. D'où il résulte que $\mathrm{sp}_{\lambda_0}[P]$ contient la projection de $\mathrm{sp}_{\lambda_0}(\mathscr{A}]$ sur chacun des facteurs de K. On en déduit alors la conclusion de 1.6.

Remarque. De l'égalité $P(\lambda)^{-1} = -r_{0,m-1}(\lambda)$ il résulte évidemment $Q_k = -(B_k)_{(0,m-1)}$ donc que $\dim \mathrm{sp}_{\lambda_0}[P] < +\infty$ sachant que $\dim \mathrm{sp}_{\lambda_0}[\mathscr{A}] < +\infty$.

Theoreme 1.1. *On suppose qu'il existe s demi-droites $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ issues de 0 et divisant le plan complexe en s secteurs d'ouverture $\alpha_j < \pi/p$ pour $j = 1,\cdots,s$. On suppose de plus qu'il existe un entier $N\geqq 0$ tel que*

$$\|P(\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H,D(P_0))} = O(|\lambda|^N) \qquad \textit{lorsque } |\lambda|\to+\infty,\quad \lambda\in\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_s.$$

Alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres généralisés de P est dense dans H.

Démonstration. L'hypothése $\|P(\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H,D(P_0))} = O(|\lambda|^N)$ entraîne facilement qu'il existe $M>0$ tel que $\|(\mathscr{A}-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(K)} = O(|\lambda|^M)$ sous les mêmes conditions. D'après Dunford–Schwartz [4] corollaire 31 p. 1115, on en déduit que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres généralisés de $\mathscr{A}$ est dense dans K. On obtient alors le théorème 1.1 en utilisant la proposition 1.6.

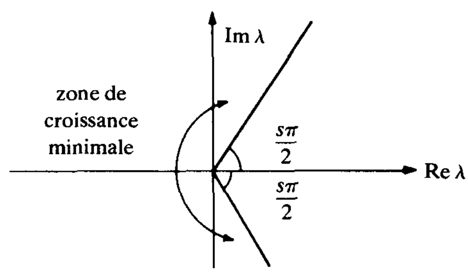
Remarque. Dans l'énoncé précédent, on trouve une condition d'ouverture d'angle liée à la classe de compacité de P_0^{-1}. Cette condition peut paraître artificielle. Cependant, dans le cas général, on ne peut pas espérer mieux. On pourrait espérer par exemple qu'il existe des valeurs propres dès que $P(\lambda)^{-1}$ est de croissance minimale dans un secteur d'ouverture assez grande (pour être proche du cas autoadjoint). Les exemples suivants montrent qu'il n'en est rien. Soit $H = L^2([0,1])$ et posons $Au = du/dt$ avec $D(A) = \{u\in H^1(]0,1[),\ u(0) = \}$. On a évidemment $A^{-1}v(x) = \int_0^x v(t)dt$ pour $v\in L^2([0,1])$. Il est bien connu que A^{-1} est compact et que son spectre est réduit à $\{0\}$. Donc A n'a pas de valeurs propres. On a d'autre part

$$\mathrm{Re}(Au,u) = \int_0^1 \frac{|u(t)|^2}{2}\,dt \quad \text{si } u\in D(A).$$

Donc toute demi-droite issue de 0 de $\{\lambda\in\mathbf{C}, \mathrm{Re}\,\lambda<0\}$ est un rayon de croissance minimale pour A.

Si $(\mu_n)_{n\geqq 1}$ désigne la suite des valeurs propres de $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, on a classiquement $\mu_n \approx 1/n$. Soit alors $s \in]0,1[$. De la manière habituelle, on définit A^s de domaine $D(A^s)$. On montre alors facilement que $|\mathrm{Arg}(A^s u, u)| \leqq s\pi/2$ pour tout $u \in D(A^s)$ et que la suite $(\mu_{n,s})_{n\geqq 1}$ des valeurs propres de $(A^{s*}A^s)^{-\frac{1}{2}}$ vérifie $\mu_{n,s} \approx 1/n^s$. La condition d'ouverture est ici $< s\pi$.

Ces exemples sont des cas limites où le principe de Phragmen–Lindelöff ne s'applique pas.



En vue d'appliquer ce qui précède à des opérateurs différentiels, il est utile de définir les directions du plan complexe où la croissance de $P(\lambda)^{-1}$ est optimale.

Définition 1.4. Pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\rho_0 \geqq 0$, posons $\Delta(\theta, \rho_0) = \{\rho e^{i\theta}, \rho > \rho_0\}$. On dira que $\Delta(\theta, \rho_0)$ est un rayon de croissance minimale pour P s'il existe $C > 0$ telle que:

$$(*) \qquad \|P(\rho e^{i\theta})^{-1}\|_{(H, D(P_0^s))} \leqq \frac{C}{\rho^{m(1-s)}}$$

pour tout $\rho \geqq \rho_0$ et tout $s \in [0,1]$.

Remarques. (1) Par interpolation complexe (i.e. le théorème des trois droites), il suffit d'avoir $(*)$ pour $s = 0$ et $s = 1$.

(2) On vérifie facilement que $(*)$ pour $s = (m-j)/m$, $0 \leqq j \leqq m-1$, équivaut à dire qu'il existe $C' > 0$ telle que $\|(\mathscr{A} - \rho e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathscr{L}(K)} \leqq C'/\rho$ pour $\rho > \rho_0$, c'est-à-dire que. $\Delta(\theta, \rho_0)$ est un rayon de croissance minimal usuel pour $\mathscr{A}$.

Let résultat suivant montre que la notion de rayon de croissance minimale est stable par certaines perturbations.

Proposition 1.5. *Soit* $Q(\lambda) = Q_0 + \lambda Q_1 + \cdots + \lambda^{m-1} Q_{m-1}$ *un polynôme à coefficients opérateurs, de degré* $< m-1$. *On suppose que pour tout* $j = 0, 1, \cdots, m$ *il existe* $\theta_j \in]0, 1/m]$ *tel que* $Q_j P_0^{(j-m)/m+\theta_j}$ *se prolonge en un opérateur borné sur* H.

Si $\Delta(\theta,\rho_0)$ est un rayon de croissance minimale pour P, alors il existe $\rho_0' \geqq 0$ tel que $\Delta(\theta,\rho_0')$ soit un rayon de croissance minimale pour $P+Q$.

DÉMONSTRATION. $Q(\lambda)$ est une perturbation compacte de $P(\lambda)$. D'où $\operatorname{Ind} P(\lambda) = \operatorname{Ind}(P(\lambda)+Q(\lambda)) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Posons $P'(\lambda) = P(\lambda)+Q(\lambda)$. Pour $\lambda \in \Delta(\theta,\rho_0)$ on a $P'(\lambda) = (I+Q(\lambda)P(\lambda)^{-1})P(\lambda)$. Or on a:

$$\lambda^j Q_j P(\lambda)^{-1} = \lambda^j Q_j P_0^{(j-m)/m+\theta_j} P_0^{-((j-m)/m+\theta_j)} P(\lambda)^{-1} \qquad \text{pour } \lambda \in \Delta(\theta,\rho_0).$$

Utilisant les hypothèses de 1.5, on en déduit qu'il existe $C_j > 0$ telle que $\|\lambda^j Q_j P(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqq C_j / |\lambda|^{m\theta_j}$ pour tout $\lambda \in \Delta(\theta,\rho_0)$. Choisissons $\rho_0' > \rho_0$ de sorte que $\sum_{j=0}^{m-1} C_j/\rho^{m\theta_j} \leqq \frac{1}{2}$ pour $\rho \geqq \rho_0'$. $P'(\lambda)$ est alors injectif donc bijectif pour tout $\lambda \in \Delta(\theta,\rho_0')$ et $P'(\lambda)^{-1} = P(\lambda)^{-1}(I+Q(\lambda)P(\lambda)^{-1})^{-1}$. Or

$$\|(I+Q(\lambda)P(\lambda)^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqq 1 \qquad \text{pour tout } \lambda \in \Delta(\theta,\rho_0')$$

d'où $\|(P'(\rho e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,P_0^s)} \leqq C/\rho^{m(1-s)}$ pour tout $\rho \geqq \rho_0'$.

2. Le cadre differentiel

Soit $P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \cdots + \lambda^m P_{m-1} + \lambda^m$ où $P_0,\cdots,P_{m-1}$ sont des opérateurs differentiels d'ordre $\leqq m$. On fait les hypothèses suivantes:

($\mathcal{H}$) Il existe un entier $k \geqq 1$ tel que $P(r^{1/m}\lambda, r^{1/k}x, r^{1/m}\xi) = rP(\lambda,x,\xi)$ pour tout $r>0$ et $(\lambda,x,\xi) \in \mathbf{C}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$.

($\mathcal{E}$) $P(\rho,x,\xi) \neq 0$ pour tout $\rho \geqq 0$ et tout $(x,\xi) \in \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\setminus\{(0,0)\}$.

($\mathcal{C}$) P_0 prend ses valeurs dans un cône propre de $\mathbf{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel.

Désignons par S_P le cône de $\mathbf{C}$ défini par:

$$S_P = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \text{il existe } (x,\xi) \in \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\setminus(0,0) \text{ tel que } P(\lambda,x,\xi) = 0\}.$$

On sait que P_0 admet un unique prolongement fermé à partir de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ comme opérateur non borné de $L^2(\mathbf{R}^n)$ (D. Robert [12]). Désignons alors par $D(P_0)$ le domaine de la fermeture de P_0. En utilisant les résultats de [12] on peut voir facilement que:

$$D(P_0) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n);\ x^\alpha D^\beta u \in L^2(\mathbf{R}^n) \text{ pour } \frac{|\alpha|}{k} + \frac{|\beta|}{m} \leqq 1\right\}$$

ou encore que $D(P_0) = \{u \in H^m(\mathbf{R}^n);\ (1+|x|^2)^{k/2}u \in L^2(\mathbf{R}^n)\}$.

PROPOSITION 2.1. (i) *Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $P(\lambda)$ admet un unique prolongement fermé, de domaine $D(P_0)$.*

(ii) *Il existe un cône propre Γ de $\mathbf{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel tel que $(P_0-\mu)^{-1}$ existe pour tout $\mu \in \Gamma$ et*

$$\|(P_0-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n))}=O\left(\frac{1}{|\mu|}\right), \qquad |\mu|\to+\infty, \quad \mu\in\Gamma.$$

(iii) $(P_0-\mu)^{-1}$ *est compact en tout point μ de l'ensemble résolvant de P_0.*

DÉMONSTRATION. (i) et (ii) résultent de [12]. (iii) résulte des caractérisations rappelées ci-dessus de $D(P_0)$ que l'injection $D(P_0)\to L^2(\mathbf{R}^n)$ est compacte.

On déduit en particulier de la proposition précédente qu'il existe $C_0>0$ tel que l'opérateur $P_0+C_0=P_0'$ vérifie l'hypothèse (H_1) de 1.

Du point de vue de la recherche des rayons de croissance minimale, il revient au même d'étudier $P'(\lambda)=P_0'+\lambda P_1+\cdots+\lambda^{m-1}P_{m-1}$. Avant de faire cette étude vérifions les hypothèses (H_2) et (H_3) pour $P'(\lambda)$. (H_2) résultera de la:

PROPOSITION 2.2. *Soit $\theta\in[0,1]$ et $Q:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ un symbole quasi-homogène vérifiant $Q(r^{1/k}x, r^{1/m}\xi)=r^{1-\theta}Q(x,\xi)$. On désigne par Q l'opérateur pseudodifferentiel de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ défini par Q. Alors les opérateurs $QP_0'^{(\theta-1)}$ et $P_0'^{(\theta-1)}Q$ se prolongent en des opérateurs linéaires continus de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.*

DÉMONSTRATION. Cette proposition résulte d'un calcul classique sur les opérateurs pseudodifférentiels globaux. Nous reprendrons d'ailleurs ce calcul plus loin.

Il nous reste à étudier (H_3).

PROPOSITION 2.3. *Pour tout $\varepsilon>0$ on a:*

$$P_0'^{-(1/m)}\in C^{n(1+m/k)+\varepsilon}(L^2(\mathbf{R}^n)).$$

DÉMONSTRATION. Par interpolation complexe (Gohberg et Krein [6]), il revient au même de montrer $P_0'^{-1}\in C^{n/m(1+m/k)+\varepsilon}$. Or $(P_0'^{-1})^*(P_0'^{-1})$ est l'inverse de l'opérateur $P_0'(P_0'^*)$. Ce dernier est un opérateur autoadjoint globalement quasi-elliptique de symbole "quasi-principal" $(x,\xi)\mapsto|P_0(x,\xi)|^2$. Désignons par $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ la suite croissante des valeurs propres de $P_0'P_0'^*$, chaque valeur propre étant répétée suivant sa multiplicité. Il résulte de [12]:

$$\sum_{\lambda_j\leq t}1\sim(2\pi)^{-n}\int_{|P_0(x,\xi)|^2\leq t}dx\,d\xi, \qquad t\to+\infty$$

d'où $\sqrt{\lambda_j}\sim\gamma_0 j^{mk/n(k+m)}$, $j\to+\infty$ où $\gamma_0>0$, et il en résulte que $\Sigma_j\lambda_j^{-p/2}<+\infty\Leftrightarrow p>n(1/k+1/m)$.

Nous énonçons maintenant les résultats principaux de notre travail:

THÉORÈME 2.1. *Soit* $\theta \in [0, 2\pi[$. *Il existe* ρ_0 *positif ou nul tel que* $\Delta(\theta, \rho_0)$ *soit un rayon de croissance minimale pour* P *si et seulement si* $\Delta(\theta, 0) \subseteq \mathbf{C} \setminus S_P$.

THÉORÈME 2.2. *Soient* $0 \leqq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ *tels que* $\Delta(\theta_1, 0) \cup \Delta(\theta_2, 0) \subset \mathbf{C} \setminus S_P$ *et* $\theta_2 - \theta_1 < k\pi/n(k+m)$. *S'il existe* $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$ *tel que* $\Delta(\theta, 0) \subset S_P$, *alors il existe* $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, $\arg \lambda \in [\theta_1, \theta_2]$ *tel que* $P(\lambda_0)$ *ne soit pas injectif.*

THÉORÈME 2.3. *Soient* $\Delta(\theta_1, 0), \cdots, \Delta(\theta_s, 0)$ *s demi-droites du plan complexe. On suppose*:

(i) $0 \leqq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_s \leqq 2\pi$,

(ii) $|\theta_{j+1} - \theta_j| < k\pi/n(m+k)$ *pour* $j = 1, \cdots, s-1$, $\theta_1 < k\pi/n(m+k)$ *et* $\theta_1 - \theta_s + 2\pi < k\pi/n(m+k)$,

(iii) $\Delta(\theta_j, 0) \subset \mathbf{C} \setminus S_P$ *pour* $j = 1, \cdots, s$.

Alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres généralisés de P *est dense dans* $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Admettons pour le moment le théorème 2.1 et nous allons en déduire les théorèmes 2.2 et 2.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2. Supposons que la conclusion ne soit pas vérifiée. $P(\lambda)$ étant d'indice nul pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \to P(\lambda)^{-1}$ est analytique dans le secteur $\theta_1 < \operatorname{Arg} \lambda < \theta_2$ à valeurs dans $\mathscr{L}(L^2(\mathbf{R}^n), D(P_0))$. Or l'hypothèse du théorème 2.2 et le théorème 2.1 entraînent:

$$(**) \qquad \| P(\lambda)^{-1} \|_{(L^2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))} = O\left(\frac{1}{|\lambda|^m}\right) \quad \text{et} \quad \| P(\lambda)^{-1} \|_{(L^2(\mathbf{R}^n), D(P_0))} = O(1)$$

sous la condition: $|\lambda| \to +\infty$, $\lambda \in \Delta(\theta_1, 0) \cup \Delta(\theta_2, 0)$. Posons $p = n(1 + m/k)$. Il résulte de la proposition 1.5 et du principe du maximum que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que:

$$\| P(\lambda)^{-1} \|_{(L^2(\mathbf{R}^n), D(P_0))} \leqq C_\varepsilon e^{|\lambda|^{p+\varepsilon}} \qquad \text{pour } \theta_1 \leqq \arg \lambda \leqq \theta_2.$$

Le théorème de Phragmen–Lindelöf (Titchmarsh [13]) implique alors (**) dans tout le secteur $\theta_1 \leqq \arg \lambda \leqq \theta_2$ et en particulier pour $\arg \lambda = \theta$. Or le théorème 2.1 dit alors que $\Delta(\rho, 0) \subset \mathbf{C} \setminus S_P$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse du théorème 2.2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3. D'après le théorème 2.1 il existe $\rho_0 > 0$ tel que l'on ait:

$$\| P(\lambda)^{-1} \|_{(H, D(P_0))} = O(1) \qquad \text{pour } |\lambda| \to +\infty, \quad \lambda \in \bigcup_{j=1}^{s} \Delta(\theta_j, \rho_0).$$

On applique alors les résultats du paragraphe 1 avec $p = n(1 + m/k) + \varepsilon$.

Commençons la démonstration du théorème 2.1 par la:

PROPOSITION 2.3. *Si $\Delta(\theta, 0) \subseteq \mathbf{C} \setminus S_P$ alors il existe $\rho_0 \geqq 0$ tel que $\Delta(\theta, \rho_0)$ est un rayon de croissance minimale pour P.*

DÉMONSTRATION. Posons $\lambda = \rho e^{i\tau}$, $\rho > 0$. Pour tout entier N, on construit des opérateurs pseudodifférentiels $B_N(\lambda)$ et $R_N(\lambda)$ de sorte que $P(\lambda) \circ B_N(\lambda) = I + R_N(\lambda)$ de la manière habituelle $B_N(\lambda) = b_0(\lambda) + \cdots + b_N(\lambda)$ où les symboles $b_j(\lambda)$ sont définis par:

$$b_0(\lambda) = \frac{1}{P(\lambda)}$$

$$b_{j+1}(\lambda) = -\frac{1}{P(\lambda)} \sum_{\substack{0 \leqq l \leqq j \\ |\alpha| + l = j+1}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha P(\lambda) D^\alpha b_l(\lambda) \quad \text{pour } j \geqq 0$$

où l'on a posé $\partial^\alpha = \partial^\alpha / \partial \xi^\alpha$ et $D^\beta = (i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha / \partial x^\alpha$.

Il est clair que le symbole de $R_N(\lambda)$ est donné par:

$$R_N(\lambda) = \sum_{\substack{0 \leqq j \leqq N \\ N+m \geqq |\alpha| + j \geqq N+1}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha P(\lambda) D^\alpha b_{j,\lambda}.$$

Nous avons les estimations suivantes:

LEMME 1. *Pour tout entier $N \geqq 0$ et pour tous multiindices α et β il existe des constantes $C_N(\alpha, \beta)$ et $C'_N(\alpha, \beta)$ telles que*:

(i) $|\partial^\alpha D^\beta B_N(\lambda, x, \xi)| \leqq C_N(\alpha, \beta)(\lambda^m + |x|^k + |\xi|^m)^{-1-(|\alpha|/m)-(|\beta|/k)}$,

(ii) $|\partial^\alpha D^\beta R_N(\lambda, x, \xi)| \leqq C'_N(\alpha, \beta)(\rho^m + |x|^k + |\xi|^m)^{-(N+1)(1/k+1/m)-(|\alpha|/m)-(|\beta|/k)}$

pour tous $\lambda = \rho e^{i\theta}$, $\rho \geqq 0$ et $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$.

DÉMONSTRATION. Découle facilement du fait que les b_j satisfont à la relation d'homogénéité:

$$\partial^\alpha D^\beta b_j(r^{1/m}\lambda, r^{1/k}x, r^{1/m}\xi) = r^{-1-j(1/k+1/m)-(|\alpha|/m)-(|\beta|/k)} \partial^\alpha D^\beta b_j(\lambda, x, \xi).$$

Afin de déduire des estimations précédentes des majorations de norme pour les opérateurs $B_N(\lambda, x, D)$ et $R_N(\lambda, x, D)$, rappelons un résultat classique de continuité L^2 des opérateurs pseudodifférentiels (par exemple H. O. Cordes [3]). Désignons par S^0 l'espace des symboles $s \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ tels que pour tous multiindices α et β on ait: $\sup_{\mathbf{R}^{2n}} |\partial^\alpha D^\beta s(x, \xi)| < +\infty$. S^0 est un espace de Fréchet muni de la famille de semi-normes:

$$P_j(s) = \max_{|\alpha|+|\beta|\leqq j} \left[\sup_{\mathbf{R}^{2n}} |\partial^\alpha D^\beta s(x,\xi)| \right].$$

Il résulte de [3], théorème B_1', que si $s \in S^0$ alors $s(x,D)$ est un opérateur borné de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même. Nous utiliserons la précision suivante:

LEMME 2. *Il existe une constante $\gamma_0 > 0$ et un entier $j_0 \geqq 0$ ne dépendant que de l'entier n tels que*:

$$\| s(x,D) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))} \leqq \gamma_0 \max_{|\alpha|+|\beta|\leqq j_0} \left[\sup_{\mathbf{R}^{2n}} |\partial^\alpha D^\beta s| \right]$$

pour tout $s \in S^0$.

DÉMONSTRATION. $s \mapsto s(x,D)$ est une application linéaire de l'espace de Fréchet S^0 dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$. On peut donc appliquer le théorème du graphe fermé. On vérifie en effet facilement que $s \mapsto s(x,D)$ est fermée.

LEMME 3. (i) $B_N(\lambda,x,D) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), D(P_0))$ *pour tout entier N et* $\lambda \in \Delta(\theta,0)$. *On a de plus*:

(i_1) $\| B_N(\lambda,x,D) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), D(P_0))} = O(1)$, $\lambda \to +\infty$, $\lambda \in \Delta(\theta,0)$,

(i_2) $\| B_N(\lambda,x,L) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))} = O(1/|\lambda|^m)$, $\lambda \to +\infty$, $\lambda \in \Delta(\theta,0)$;

(ii) $R_N(\lambda,x,D) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$ *pour tout entier N et tout* $\lambda \in \Delta(\theta,0)$.

De plus:

(ii) $\| R_N(\lambda,x,D) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))} = O(1/|\lambda|^{-m(N+1)(1/k+1/m)})$ *pour* $|\lambda| \to +\infty$, $\lambda \in \Delta(\theta,0)$.

DÉMONSTRATION. Le lemme 1 entraîne:

$$|\partial^\alpha D^\beta B_N(\lambda,x,\xi)| \leqq C_N(\alpha,\beta)\rho^{-m} \qquad \text{et}$$

$$|\partial^\alpha D^\beta R_N(\lambda,x,\xi)| \leqq C_N'(\alpha,\beta)\rho^{-m(N+1)(1/k+1/m)}.$$

Le lemme 2 entraîne alors (i_2) et (ii).

Pour établir (i_1) on calcule le symbole de $P_0(x,D)B_N(\lambda,x,D)$:

$$P_0 B_N(\lambda) = \sum_{|\gamma|\leqq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\gamma P_0 D^\gamma B_{N,\lambda}.$$

On en déduit alors que pour tout N, α et β, il existe $C_N''(\alpha,\beta) > 0$ telle que $|\partial^\alpha D^\beta (P_0 B_N(\lambda))| \leqq C_N''(\alpha,\beta)$ pour $\lambda \in \Delta(\theta,0)$, $(x,\xi) \in \mathbf{R}^{2n}$. Le lemme 2 implique alors que $P_0(x,D)B_N(\lambda,x,D) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$. D'où il résulte que $B_N(\lambda,x,D) \in (L^2(\mathbf{R}^n), D(P_0))$ et que (i_1) est vérifiée.

FIN DE DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.3. On applique ce qui précède avec $N=0$. D'après le lemme 3, il existe $\rho_0>0$ tel que $\rho \geqq \rho_0$ entraîne $\|R_0(\rho e^{i\theta}, x, D)\| \leqq \frac{1}{2}$. On obtient alors $P(\lambda)B_0(\lambda)\,(I+R_0(\lambda))^{-1}=I$ pour $\lambda=\rho e^{i\theta}$, $\rho \geqq \rho_0$. Il en résulte que $P(\lambda): D(P_0) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ est surjectif. Or $P(\lambda)$ est à indice, d'indice nul. D'où $P(\lambda)$ est bijectif et $P(\lambda)^{-1}=B_0(\lambda)(I+R_0(\lambda))^{-1}$ pour $\lambda=\rho e^{i\theta}$, $\rho \geqq \rho_0$. Il résulte alors du lemme 3 que $\Delta(\theta,\rho_0)$ est un rayon de croissance minimale pour P.

Réciproquement, nous allons démontrer:

PROPOSITION 2.4. *Soit $\rho_0 \geqq 0$ tel que $\Delta(\theta,\rho_0)$ soit un rayon de croissance minimale pour P, alors $\Delta(\theta,0) \subseteq \mathbf{C} \setminus S_P$.*

DÉMONSTRATION. Il résulte de l'hypothèse qu'il existe $C>0$ telle que l'on ait:
(1) $\rho^m \|u\|_{L^2} \leqq C\|P(\rho e^{i\theta})u\|_{L^2}$,
(2) $\|D^\alpha u\|_{L^2} \leqq C\|P(\rho e^{i\theta})u\|_{L^2}$,
(3) $\|x^\beta u\|_{L^2} \leqq C\|P(\rho e^{i\theta})u\|_{L^2}$,
pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $\rho \geqq \rho_0$, $|\alpha| \leqq m$ et $|\beta| \leqq k$.

Nous allons utiliser la méthode classique d'addition de variable. Nous établissons des inégalités a priori pour l'opérateur $P(e^{i\theta}D_t, x, D_x)$ dans $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$. Désignons par $\mathcal{S}_{\rho_0}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$ l'espace des fonctions $v:(t,x)\mapsto v(t,x)$ telles que $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$ et supp $\hat{v} \subset]\rho_0,+\infty[\times\mathbf{R}^n$ où $\hat{v}$ désigne la transformée de Fourier partielle par rapport à t. De (1), (2), (3) il résulte que pour tout $v \in \mathcal{S}_{\rho_0}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$ on a:

(1′) $\|D_t^m v\|_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)} \leqq C\|P(e^{i\theta}D_t, x, D_x)v\|_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)}$,
(2′) $\|D_x^\alpha v\|_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)} \leqq C\|P(e^{i\theta}D_t, x, D_x)v\|_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)}$ pour $|\alpha| \leqq m$,
(3′) $\|x^\beta v\|_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)} \leqq C\|P(e^{i\theta}D_t, x, D_x)v\|_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)}$ pour $|\beta| \leqq k$.

Soit $(j_1,\cdots,j_n)$ une permutation de $\{1,\cdots,n\}$ et soit:

$$\mathcal{O}=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n : x_{j_1}>0,\cdots,x_{j_p}>0;\ x_{j_{p+1}}<0,\cdots,x_{j_n}<0\}.$$

On se donne alors $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{O})$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que $\hat{\psi} \in C_0^\infty]\rho_0,+\infty[$ et $\int_{\mathbf{R}}|\psi(t)|^2dt=1$. On pose $\delta=1+k/m$ et pour tout $\varepsilon \in]0,1]$:

$$u_\varepsilon(x,t)=\varepsilon^{k+(n+1)/2}\exp i\left(\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j|x_j|^\delta}{\delta}+|x|^{\delta-1}t\rho\right)\varphi(\varepsilon x)\psi(\varepsilon t).$$

Or on obtient facilement les relations suivantes:

(4) $\|D_t^m u_\varepsilon\|_{L^2}^2=\rho^{2m}\||x|^k u_\varepsilon\|_{L^2}^2+O(1)$, $\varepsilon\to 0$,
(5) $\|D_x^\alpha u_\varepsilon\|_{L^2}^2=\|(x_*^{\delta-1}\xi)^\alpha u_\varepsilon\|_{L^2}^2+O(1)$, $\varepsilon\to 0$,
(6) $\|P(e^{i\theta}D_t,x,D_x)u_\varepsilon\|_{L^2}^2=\int|P(|x|^{\delta-1}\rho e^{i\theta},x,x_*^{\delta-1}\xi)|^2|u_\varepsilon(t,x)|^2dtdx+O(1)$,
$\varepsilon\to 0$, où $x_*^{\delta-1}=(x_1^{\delta-1},\cdots,x_n^{\delta-1})$ et $x_*^{\delta-1}\xi=(x_1^{\delta-1}\xi_1,\cdots,x_n^{\delta-1}\xi_n)$.

(4), (1′) et (6) donnent alors:

$$\rho^{2m}\int_{\mathbf{R}^n}|y|^{2k}|\varphi(y)|^2dy \leqq C\int_{\mathbf{R}^n}|P(|y|^{\delta-1}\rho e^{i\theta}, y, y_*^{\delta-1}\xi)|^2|\varphi(y)|^2dy$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{O})$. D'où:

(7) $\rho^{2m}|x|^{2k} \leqq C|P(|x|^{k/m}\rho e^{i\theta}, x, x_*^{k/m}\xi)|^2$ pour tout $\rho \geqq \rho_0$, $x \in \mathcal{O}$ et $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Posons $x = r\sigma$ où r réel >0 et $\sigma \in S^n$. Par homogénéité de (7), il résulte:

(7′) $\rho^{2m} \leqq C'|P(\rho e^{i\theta}, \sigma, \xi)|^2$ pour $\rho \geqq \rho_0$, $\sigma \in S^n \cap \mathcal{O}$ et $\xi \in \mathbf{R}^n$.

De même à partir de (5) et (2′), pour $|\alpha| = m$, on obtient:

(8) $|\xi|^{2m} \leqq C'|P(\rho e^{i\theta}, \sigma, \xi)|^2$ pour $\rho \geqq \rho_0$, $\sigma \in S^n \cap \mathcal{O}$ et $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Enfin à partir de (3′) on obtient:

$$1 \leqq C'|P(\rho e^{i\theta}, \sigma, \xi)|^2 \qquad \text{pour } \rho \geqq \rho_0, \quad \sigma \in S^n \cap \mathcal{O} \quad \text{et} \quad \xi \in \mathbf{R}^n$$

d'où l'on tire $(1 + \rho^{2m} + |\xi|^{2m})^{\frac{1}{2}} \leqq \sqrt{3C'}|P(\rho e^{i\theta}, \sigma, \xi)|$ et par homogénéité:

(9) $(|x|^{2k} + \rho^{2m} + |\xi|^{2m})^{\frac{1}{2}}\sqrt{3C'}|P(\rho e^{i\theta}, x, \xi)|$ pour $\rho \geqq \rho_0$, $x \in \mathcal{O}$ et $\xi \in \mathbf{R}^n$.

(9) entraîne clairement que $\Delta(\theta, 0) \subseteq \mathbf{C}\setminus S_P$.

3. Applications

Application 1. $P(\lambda) = D_t^2 + (t^2 - \lambda)^2$. Ici S_P se calcule facilement. On a $\tau^2 + (t^2 - \lambda)^2 = 0$ si et seulement si $\lambda = t^2 \pm i\tau$ d'où $S_P = \{\lambda \in \mathbf{C}; \operatorname{Re}\lambda \geqq 0\}$. D'autre part on a $P_0 = D_t^2 + t^4$ et $P^{-\frac{1}{2}} \in C^{3/2+\varepsilon}(L^2(\mathbf{R}))$ pour tout $\varepsilon > 0$. La condition d'ouverture est donc ici $2\pi/3 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Or les rayons de croissance minimale se trouvent dans le demi-plan $\{\lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. C'est insuffisant pour pouvoir appliquer le théorème 1.1. On pourra l'appliquer grâce au:

Lemme 3.1. *La demi-droite $\mathbf{R}_+$ est un rayon de croissance polynomiale pour $P(\lambda) = D_t^2 + (t^2 - \lambda)^2$. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que $\|P(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))} \leqq C/\sqrt{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $\lambda \geqq 1$.*

Démonstration. Tel qu'il est énoncé, le lemme résulte du travail de Helffer–Nourrigat [8]. Ici nous allons démontrer directement un résultat plus faible mais suffisant pour pouvoir appliquer le théorème 3.1. Nous allons établir qu'il existe $C > 0$ telle que:

$$(*) \qquad \|P(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))} \leqq C\lambda.$$

Posons $\lambda = t_0^2$. Il est clair que $P(t_0^2)^{-1}$ existe pour tout $t_0 > 0$. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On a:

$$(P(t_0^2)u, u) = \int_{-\infty}^{+\infty}|u'|^2dt + \int_{-\infty}^{+\infty}(t - t_0)^2(t + t_0)^2|u|^2dt.$$

On fait le changement de variables $t = t_0 s$ et de fonction $v(s) = t_0^{\frac{1}{2}} u(st_0)$. On obtient:

$$(P(t_0^2)u, u) = t_0^{-2} \int |v'(s)|^2 ds + t_0^4 \int (s-1)^2(s+1)^2 |v(s)|^2 ds$$

d'où $(P(t_0^2)u, u) \geqq t_0^{-2}(P(1)v, u)$ si $t_0 > 1$.

Or

$$\min_{\substack{v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \\ \|v\|_{L^2}=1}} (P(1)v, v) = \gamma > 0.$$

D'où $\|P(t_0^2)u\|_{L^2} \geqq \gamma t_0^{-2} \|u\|_{L^2}$ si $t_0 \geqq 1$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ ce qui entraîne (*).

Il résulte alors de ce qui précède:

Proposition 3.1. *Le système des vecteurs propres généralisés de* $P(\lambda) = D_t^2 + (t^2 - \lambda)^2$ *est total dans* $L^2(\mathbf{R})$. *En particulier il existe* $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, $0 < \arg \lambda_0 < \pi/2$ *tel que* $P(\lambda_0)$ *n'est pas injectif dans* $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

On a ensuite le:

Corollaire (B. Helffer [7]). *L'opérateur* $A = D_t^2 + (t^2 D_x - D_z)^2$ *est hypo-elliptique non hypo-analytique au voisinage de l'origine dans* $\mathbf{R}^3$.

Application 2. $P(\lambda) = D_t^2 + t^2 + 2a\lambda t + 2b\lambda D_t + \lambda^2$, a et b étant réels. On suppose que le polynôme en $\lambda : \tau^2 + t^2 + 2a\lambda t + 2b\lambda\tau + \lambda^2$ n'a pas de racines réelles pour tout $(t, \tau) \in \mathbf{R}^2$. Ce qui revient à imposer $a^2 + b^2 < 1$. Il résulte alors du paragraphe 2 que l'on a deux rayons de croissance minimale $[\rho_0, +\infty[$, $]-\infty, \rho_0]$ avec $\rho_0 > \rho$. Des considérations de trigonométrie élémentaire permettent de calculer S_P. On trouve $S_P = \{\lambda \in \mathbf{C}, \cos^2(\arg \lambda) \leqq a^2 + b^2\}$. D'autre part, ici on a $P_0 = D_t^2 + t^2$ et $P_0^{-\frac{1}{2}} \in C^{2+\varepsilon}(L^2(\mathbf{R}))$ pour tout $\varepsilon > 0$. On peut alors appliquer le théorème 2.3 sous la condition $a^2 + b^2 < \frac{1}{2}$.

Sur cet exemple, un calcul direct donne un résultat meilleur. Dans [7] B. Helffer montre que l'on obtient un système complet de vecteurs propres généralisés constitués d'exponentielles polynômes sous la condition $a^2 + b^2 < 1$.

Bibliographie

1. S. Agmon, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problem*, Math. Studies No. 2, Van Nostrand, 1965.

2. M. S. Baouendi and J. Sjöstrand, *Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point*, Ark. Mat. **14** (1976), 9–33.

3. H. O. Cordes, *On compactness of commutators of multiplications and convolutions and boundness of pseudodifferential operators*, J. Functional Analysis **18** (1975), 115–131.

4. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Vol. 2, Interscience Publ., 1963.

5. Friedman and Shinbrot, *Non-linear eigenvalue problems*, Acta Math. **121** (1968), 77–128.

6. I. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non autoadjoints*, Dunod, 1972.

7. B. Helffer, *Remarques sur des résultats de G. Métivier sur la non-hypo-analyticité*, Séminaire de l'Université de Nantes, exposé n° 9, 1978–79.

8. B. Helffer and J. Nourrigat, *Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de Qtudies 3*, Comm. Partial Differential Equations **3** (1978), 643–743.

9. M. V. Keldysh, *On the completness of the eigenfunctions o of classes of non-selfadjoint linear operators*, Russian Math. Surveys **26**, No. 4 (1971), 15–44.

10. M. G. Krein and H. Langer, *On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua*, in *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. 1-3 (1978), 364–399.

11. G. Metivier, *Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques analytiques*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1978–79.

12. D. Robert, *Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifferentiels*, Comm. Partial Differential Equations **3** (1978), 755–826.

13. E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, London, 1939.

INSTITUT DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITE DE NANTES
NANTES, FRANCE